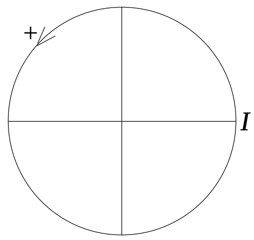
ANGLES ET ROTATIONS

<u>Rappel</u> : un cercle de rayon 1, orienté, sur lequel est fixé un point " origine I " est appelé <u>trigonométrique</u>.



À tout point M du cercle trigonométrique, on associe une famille de nombres réels appelés <u>abscisses curvilignes de M</u> :

Si x est l'une d'elles, toutes les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Il existe une et une seule abscisse curviligne appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. Sa valeur absolue est égale à la longueur du "petit" arc géométrique d'extrémités I et M.

1) Angles géométriques et angles orientés

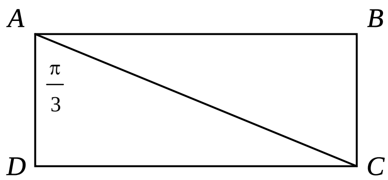
Un angle géométrique est toujours **positif**.

Un angle orienté peut être négatif ; cela dépend de l'orientation choisie.

<u>Exemple</u> : Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique, on a :

Angles géométriques :

$$\widehat{DAC} = \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3}$$



Angles orientés (angle entre 2 vecteurs)

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3} \text{ et } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

(mesures principales)

<u>Remarque</u> : un angle a une infinité de mesures. Sur la figure ci-dessus, on aurait pu écrire :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{7\pi}{3} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{5\pi}{3}$$

Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). On note alors :

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$$

<u>**La seule mesure de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est appelée mesure principale.**</u>

En prenant la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté, on obtient l'angle géométrique.

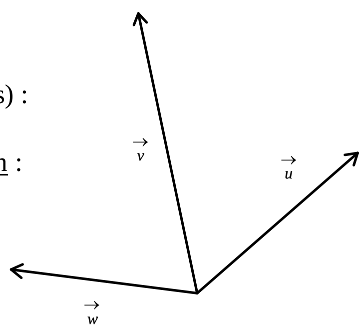
<u>Relation de Chasles avec les angles</u>

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a la relation suivante (dite de Chasles) :

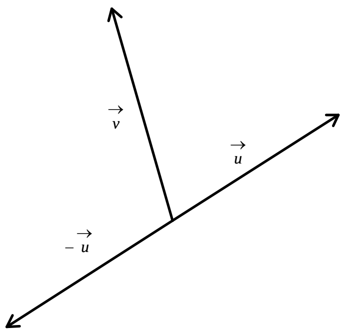
$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \qquad (2\pi)$$

(Cette relation est admise à notre niveau)

<u>Illustration</u> :



Variations : on a les relations suivantes :



- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ (2π)
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ (2π)
- $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (2π) (pour tout $k \neq 0$)

  En particulier ($k = -1$) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (2π)

Démonstrations de ces trois relations (à partir de la relation de Chasles)

- D'après la relations de Chasles, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) \quad (2\pi)$$

  Or, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (2π), d'où : $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ (2π)

- D'après la relations de Chasles, on a :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) (2\pi)$$

  Or, $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ (2π), d'où : $(-\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) + \pi$ (2π)

  Or, d'après ce qui précède : $-(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (2π)

  D'où : $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ (2π)

  Remarque : comme $\pi = -\pi$ (2π), on a aussi : $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - \pi$ (2π)

- En utilisant deux fois la relation de Chasles :

$$(k\vec{u}, k\vec{v}) = (k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, k\vec{v}) \quad (2\pi)$$

  Cas 1 : $k > 0$.

  Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens, donc $(k\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (2π)

  De même, $(\vec{v}, k\vec{v}) = 0$ (2π).

  D'où : $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (2π)

  Cas 2 : $k < 0$.

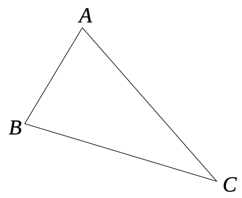
  Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens opposés, donc $(k\vec{u}, \vec{u}) = \pi$ (2π)

  De même, $(\vec{v}, k\vec{v}) = \pi$ (2π).

  Donc $(k\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{v}, k\vec{v}) = \pi + \pi = 0$ (2π)

  D'où : $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (2π)

Application : ABC est un triangle de sens direct. Démontrer que la somme des mesures de ses angles orientés est égale à π.



Notons $\theta = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB})$

Comme $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CA})$, on peut écrire :

$\theta = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) \ (2\pi)$

Et d'après la relation de Chasles : $\theta = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CB}) \ (2\pi)$

D'où : $\theta = \pi \ (2\pi)$

Bases et repères orthonormés (ou orthonormaux) directs et indirects

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) est orthonormal(e) direct lorsque :

$$\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) est orthonormal(e) indirect lorsque :

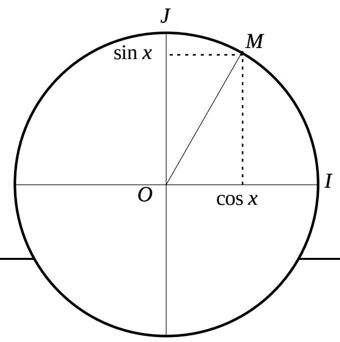
$$\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

2) Cosinus et sinus d'un angle orienté de deux vecteurs

Rappel : cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique :

Définition : Soit M un point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

- $\cos x$ est l'abscisse de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$
- $\sin x$ est l'ordonnée de M dans ce même repère.



Cosinus et sinus de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs quelconques

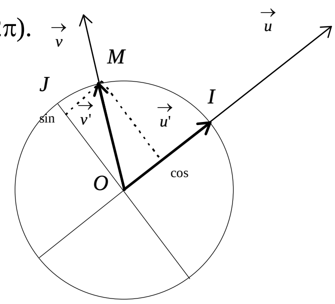
Ils sont définis comme ceci : soit O un point du plan, et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

On ramène les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à des vecteurs **unitaires** (c'est à dire de norme 1) en posant :

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \text{ et } \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Soient I le point de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}'$, J le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$.

Soit, enfin, le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}'$.



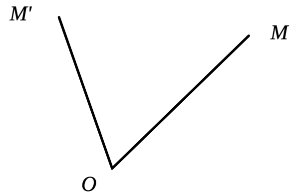
On définit alors :

- $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ comme étant l'abscisse de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$
- $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ comme étant l'ordonnée de M dans ce même repère.

3) Rotations

<u>Définition</u> : Soit O un point du plan. La rotation r de centre O et d'angle α transforme un point M en un point image M' tel que :

$$OM' = OM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha\ (2\pi)$$



<u>Remarques</u> :

- L'image du centre O est O (on dit que le point O est invariant).
- Les rotations d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour direct.
- Les rotations d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour indirect.
- La rotation de centre O et d'angle $\alpha = \pi$ est la symétrie centrale par rapport à O.
- On note parfois $r_{(O\,;\,\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α.

<u>Exemple</u> : $ABCD$ est un carré de sens direct de centre O. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α.

1. Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$
2. Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$? Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?

Propriétés de conservations

<u>Les rotations conservent</u> :

- les distances
- le milieu d'un segment
- les angles orientés
- l'alignement
- le parallélisme
- l'orthogonalité

Actions sur les figures

<u>Une rotation transforme</u> :

- une droite en une droite
- un cercle en un cercle de même rayon
- un triangle en un triangle de même nature
- un quadrilatère en un quadrilatère de même nature

Composition de deux rotations

Soient r_1 et r_2 deux rotations. La transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $M' = r_2(r_1(M))$ est appelée rotation composée de r_1 et r_2. On la note $r_2 \circ r_1$.

Théorème 1 : Lorsque les deux rotations r_1 et r_2 ont le même centre O , $r_2 \circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ où α_1 et α_2 désignent les angles respectifs des rotations r_1 et r_2.

Théorème 2 : Deux rotations de même centre commutent. (faux lorsque les centres sont distincts)

Rotation réciproque

Soit r une rotation de centre O et d'angle α.

La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r. On la note r^{-1}.

Propriété : $r \circ r^{-1} = r^{-1} \circ r = \mathrm{Id}$